Proceedings of IAM, V.1, N.1, 2012, pp.81-87

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.К. Гасанов[1], Т.М. Гасымов[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: telman_bsu@box.az

Резюме. В данной работе исследуется существование и единственность обобщенного решения для линейного гиперболического уравнения с неклассическими краевыми условиями. С этой целью обобщенное решение краевой задачи разлагается в биортогональной ряд по системе собственных и присоединенных функций несамосопряженной спектральной задачи.

Ключевые слова: обобщенное решение, смешанная задача, гиперболическое уравнение, неклассические краевые условия.

AMS Subject Classification: 49J20

1. Введение

Известно, что продольные колебания стрежней и струн, электрические колебания в проводах, поперечные колебания мембраны и другие играют важную роль в различных физических и технологических процессах. Отметим, что в литературе изучены задачи, которые описываются уравнениями с частными производными гиперболического типа с классическими краевыми условиями (см. [1,3,4]). Однако, известны многочисленные задачи из физики, механики, электротехники, в которых процесс описывается уравнениями с частными производными гиперболического типа, где краевые условия являются неклассическими. Такие задачи исследованы недостаточно.

2. Постановка задачи и основные результаты

В области $D_T = \{ (x,t), 0 < x < 1, \ \ 0 < t < T \}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f(x,t) , \tag{1}$$

$$z(0,t) = 0, \qquad z_x(1,t) - z_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T , \tag{2}$$

$$z(x,0) = \varphi(x), \quad z_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$-заданные функции.

Обозначим через $\hat{W}_2^1(D_T)$ множество функций двух переменных $z(x,t)\in L_2(D_T)$, имеющих обобщенные частные производные $z_x(x,t)$ и $z_t(x,t)$ принадлежащие классу $L_2(D_T)$ и $z_t(x,t)\in L_2[0,1]$ при любом t из сегмента $[0,T]$.

Обобщенным решением задачи (1)-(3) назовем функцию $z(x,t)$, которая принадлежит $\hat{W}_2^1(D_T)$, принимает первое начальное значение равное $\varphi(x)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_0^1 \left(z_t(x,t)\phi_t(x,t)-z_x(x,t)\phi_x(x,t)+f(x,t)\phi(x,t)\right)dx\,dt+\\ +\int_0^1\psi(x)\phi(x,0)dx+\int_0^T z_x(1,t)-z_x(0,t)\phi(0,t)dt=0,\end{gathered} \tag{4}$$

для любой $\phi(x,t)\in W_2^1(D_T)$; $\phi(x,T)=0$, $\phi(1,t)=\phi(0,t)$, $\phi_x(1,t)=0$, $t\in[0,T]$.

Для получения решения задачи (1)-(3) формально применим метод разделения переменных. Для $f(x,t)=0$ будем искать нетривиальное частное решение уравнения (1) удовлетворяющее граничным условиям (2) в форме

$$z(x,t)=X(x)T(t). \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение (1), для нахождения функция $X(x)$ получаем спектральую задачу:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<1, \tag{6}$$

$$X(0)=0,\quad X'(0)=X'(1). \tag{7}$$

Краевая задача (6), (7) является несамосопряженной. Сопряженной к ней будет задача

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0,\quad 0<x<1, \tag{8}$$

$$Y'(1)=0,\quad Y(0)=Y(1). \tag{9}$$

Задачи (6),(7) и (8),(9) имеют собственные числа $\lambda_k=(2\pi k)^2$, $k=0,1,2$, и, соответственно, собственные и присоединенные функции (см[5])

$$X_0(x)=x,\quad X_{2k-1}(x)=x\cos\sqrt{\lambda_k}\,x,\quad X_{2k}(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}\,x,\ k=1,2,3,..., \tag{10}$$

$$Y_0(x)=2,\quad Y_{2k-1}(x)=4\cos\sqrt{\lambda_k}\,x,\quad Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin\sqrt{\lambda_k}\,x,\ k=1,2,3,..., \tag{11}$$

Отметим, что последовательности функций (10) и (11) биортогональны

$$(X_i,Y_j)=\int_0^1 X_i(x)Y_j(x)dx=\delta_{ij}, \tag{12}$$

и образует базис в пространстве $L_2(0,1)$, где δ_{ij} - символ Кронекера: $\delta_{ij}=1,\quad i=j,\qquad \delta_{ij}=0,\quad i\neq j.$

Теорема 1. Пусть $f(x,t)\equiv 0\ \ \varphi(x)\in W_2^{\,1}(0,1),\ \varphi(0)=0,\ \psi(x)\in L_2(0,1)$. При этом задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решением которое представляется в виде ряда:

$$z(x,t)=\left(\varphi_0+\psi_0 t\right)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}\cos 2\pi k t+\frac{1}{2\pi k}\psi_{2k}\sin 2\pi k t-\right.$$
$$\left.-\varphi_{2k-1}\,t\cos 2\pi k t+\frac{1}{2\pi k}\psi_{2k-1}\left(t\cos 2\pi k t-\frac{1}{2\pi k}\sin 2\pi k t\right)\right]X_{2k}(x)+ \tag{13}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{k-1}\cos 2\pi k t+\frac{1}{2\pi k}\psi_{2k-1}\sin 2\pi k t\right)X_{2k-1}(x),$$

где

$$\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)dx,\quad \psi_k=\int_0^1\psi(x)Y_k(x)dx,\ \ k=0,1,2,....$$

Доказательство. Легко можно доказать, что ряд (13) принадлежит классу $\hat{W}_2^1(D_T)$. Сумма ряда (13) при $t=0$ равна $\varphi(x)$.

Теперь проверим, что сумма $z(x,t)$ ряда (13) удовлетворяет интегральному тождеству (4).

Составим интеграл

$$J_N=\int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial z_N(x,t)}{\partial t}\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial z_N(x,t)}{\partial x}\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)dx\,dt+\int_0^1\psi(x)\phi(x,0)dx, \tag{14}$$

где, $z_N(x,t)$ сумма первых N членов ряда (13).

Интегрируя по частям по t и x и пользуясь тем, что $\phi(x,T)=0,\quad \phi(1,t)=\phi(0,t)$, соответственно, из (14), получаем

$$\begin{aligned}J_N=&\int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial^2 z_N(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z_N(x,t)}{\partial t^2}\right)\phi(x,t)dx\,dt-\\&-\int_0^1\left(\frac{\partial z_N(x,0)}{\partial t}-\psi(x)\right)\phi(x,0)dx.\end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 z_N(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z_N(x,t)}{\partial t^2},$$

из (15) можно записать

$$J_N = -\int_0^1 \left(\frac{\partial z_N(x,0)}{\partial t} - \psi(x) \right) \phi(x,0)dx. \tag{16}$$

Так как

$$\frac{\partial z_N(x,0)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{N} \psi_k X_k(x),$$

учитывая разложение $\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_k(x)$ и перейдя к переделу при $N \to \infty$, из равенства (16) получим, что сумма ряда (13) удовлетворяет тождеству (14).

Докажем единственность обобщенного решения. Предположим, что существует два обобщенных решения $z_1(x,t)$, $z_2(x,t)$. Тогда функция $z(x,t) = z_1(x,t) - z_2(x,t)$ является обобщенным решением задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ &z(x,0) = z_t(x,0) = 0, \\ &z(0,t) = 0, \qquad z_x(1,t) = z_x(0,t), \end{aligned} \tag{17}$$

и поэтому удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_{D_T} \left(z_t(x,t)\phi_t(x,t) - z_x(x,t)\phi_x(x,t) \right) dx\,dt = 0, \tag{18}$$

для любой

$$\phi(x,t) \in W_2^1(D_T);\ \phi(x,T) = 0, \quad \phi(0,t) = \phi(1,t), \phi_x(1,t) = 0.$$

Положим

$$\phi(x,t) = \begin{cases} Y_m(x) \int_t^b z_m(\tau)d\tau, & 0 < t < b, \\ 0 \qquad\qquad , & b \le t \le T, \end{cases}$$

где $z_m(\tau) = \int_0^1 z(x,\tau) Y_m(x)dx.$

Тогда из (18) имеем

$$\begin{aligned} &-\int_0^b \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} z_k'(t) X_k(x) Y_m(x) z_m(t) + \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) X_k'(x) Y_m'(x) \times \right. \\ &\left. \times \int_t^b z_m(\tau)d\tau \right] dx\,dt + \int_0^b z_k(t) \left(X_k'(1) - X_k'(0) \right) Y_m(0) \int_t^b z_m(\tau)d\tau = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^1 X_k'(x) Y_m'(x) dx = \sqrt{\lambda_k}\,\sqrt{\lambda_m}\,\delta_{km}\,. \tag{20}$$

Из равенства (19), учитывая (12),(20), имеем

$$-\int_0^b z_m'(t) z_m(t) dt - \lambda_m \int_0^b \left(z_m(t) \int_t^b z_m(\tau) d\tau \right) dt = 0\,. \tag{21}$$

Используя

$$\int_0^b z_m'(t) z_m(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d}{dt} z_m^2(t)\, dt\,,$$

$$\int_0^b \left(z_m(t) \int_t^b z_m(\tau) d\tau \right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^b \frac{d}{dt} \left(\int_t^b z_m(\tau) d\tau \right)^2 dt\,,$$

из (21) получим

$$-\frac{1}{2} \int_0^b \frac{d}{dt} z_m^2(t) dt + \frac{\lambda_m}{2} \int_0^b \frac{d}{dt} \left(\int_t^b z_m(\tau) d\tau \right)^2 dt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$z_m^2(b) + \lambda_m \left(\int_0^b z_m(\tau) d\tau \right)^2 = 0, \quad m = 1,2,.... \tag{22}$$

Учитывая, что $z_m(0) = 0$, из (23) имеем

$$z_m(b) = 0, m = 1,2,.... \,.$$

Учитывая произвольность числа b, получаем

$$z_m(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad m = 1,2,.... \tag{23}$$

Далее, из равенства

$$\int_0^b z_0(t) z_0'(t) dt = 0$$

аналогично вышеуказанному, имеем

$$z_0(t) = 0, \qquad \forall t \in [0, T]$$

Итак, мы доказали, что все коэффициенты $z_k(t),\ k = 0,1,2,...,$ функции $z(x,t) = z_1(x,t) - z_2(x,t)$ равны нулю. Поэтому $z_1(x,t) = z_2(x,t)$, $(x,\ t) \in D_T$.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{в} \quad D_T = \{0 < x < 1,\ 0 < t < T\} \tag{24}$$

с условиями (2) и

$$z(x,0)=0,\quad z_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{25}$$

Аналогично вышеуказанному, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $f(x,t)\in L_2(D_T)$. Тогда

$$z(x,t)=\left(\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau\right)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\left[\frac{1}{2\pi k}f_{2k}(\tau)\sin 2\pi k(t-\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2\pi k}(t-\tau)\cos 2\pi k(t-\tau)-\frac{1}{4\pi^2k^2}\sin 2\pi k(t-\tau)\right)f_{2k-1}(\tau)\right]d\tau\right\}\times \tag{26}$$

$$\times X_{2k}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi k}\int_0^t f_{2k-1}(\tau)\sin 2\pi k(t-\tau)\,d\tau\right)X_{2k-1}(x)$$

является единственным обобщенным решением задачи (24),(2), (25), где

$$f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx,\quad k=0,1,2,3,\dots.$$

Литература

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами, М.:Наука, 1975, 568 с.
2. Гасанов К.К., Гасымов Т.М. Об управляемости для волнового уравнения с неклассическими краевыми условиями, Вестник Бакинского Университета, 2009, №4, стр.19-23.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами, М.: Наука, 1978, 464 с.
4. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений, УМН, Т. 15, вып. 2, 92, 1960.
5. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием, Дифференциальные уравнения, 1977, Т. XIII, №2, стр. 295-304.
6. Hasanov K.K., Gasimov T.M. Optimal control problem for the hyperbolic type equation with non-classical boundary conditions, The 2nd International Confrence on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, 2008, p.23.
7. Hasanov K.K., Gasimov T.M. Minimal energy control for the wave equation with non-classical boundary condition, Appl. Comput. Math., V.9, №1, 2010, pp.47-56.
8. Hasanov K.K., Gasimov T.M. Minimal energy control for two-dimensional wave equation with non-classical boundary condition, Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, vol. XXX, №7, pp.115-128.

Klassik olmayan sərhəd şərtli xətti hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələnin ümumiləşmiş həllinin tədqiqi

K.K. Həsənov, T.M. Qasımov

XÜLASƏ

İşdə klassik olmayan sərhəd şərtli xətti hiperbolik tənliyin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi araşdırılır. Bu məqsədlə ümumiləşmiş həll öz-özünə qoşma olmayan spektral məsələınin məxsusi və qoşma funksiyalar sistemi üzrə biortoqonal sıraya ayrılır.

Açar sözlər: ümumiləşmiş həllər, qarışıq məsələ, hiperbolik tənlik, klassik olmayan sərhəd şərtləri.

Investigation of the generalized solution of the mixed problem for the linear hyperbolic equations with non-classic boundary conditions

K.K. Hasanov, T.M. Gasymov

ABSTRACT

In the work existence and uniqueness of the generalized solution of the linear hyperbolic equations with non-classic boundary conditions. For this purpose the generalized solutions are decomposed over the biorthogonal system of eigen and joint functions of the non-self adjoint eigenvalue problem.

Keywords: generalized solution, mixed problem, hyperbolic equation, non-classical boundary conditions.